

关于实验误差与数据处理中 几个问题的讨论

罗质华

摘要 实验误差和数据处理是大学物理实验中重要的部分,但有些问题往往容易被忽视,笔者就教学中出现的几个问题进行分析讨论。

关键词 误差 仪表 读数

1. 对杨氏模量实验中两个问题的讨论

1.1 对杨氏模量公式的讨论

在《普通物理实验》教材中,用伸长法测钢丝的杨氏模量公式为

$$E = \frac{8FLR}{\pi d^2(r_i - r_0)D} \quad (1)$$

式中 L 为钢丝长度, F 为钢丝所受的外力, R 为光杠杆平面镜到尺的距离, d 为钢丝直径, $r_i - r_0$ 为钢丝受力前后从望远镜中观察到的直尺的读数之差, D 为光杠杆的后足尖到两个前足尖的联线的垂直距离。在实际应用时,一般都采用逐差法处理数据,然后直接代入(1)式求杨氏模量。这种直接引用(1)式的方法,很容易使学生对公式中的某些物理量(如 F 、 $r_i - r_0$) 在理解上产生混乱。因为(1)式是钢丝没有加初始负载情况下的计算公式,而用逐差法处理数据时,代到(1)式中的 F 与 $r_i - r_0$ 的数值与原先的定义已发生变化,后者 F 代表施在钢丝上的末负载与初始负载之差, $r_i - r_0$ 代表末负载与初负载对应的望远镜中观察到的直尺的读数之差。为了避免这种物理概念的混淆,对于有初始负载的场合,在用(1)式时,应对(1)式作相应更动。推导如下:

设 F_{i+n} 和 F_i 表示前后施加在钢丝上的外力, r_{i+n} 和 r_i 表示对应望远镜中读得直尺的读数,分别代入(1)式,则有

$$E = \frac{8F_{i+n}LR}{\pi d^2(r_{i+n} - r_i)D} \quad (2)$$

$$E = \frac{8F_iLR}{\pi d^2(r_{i+n} - r_i)D} \quad (3)$$

由(2)、(3)可得

$$F_{i+n} - F_i = \frac{\pi d^2 DE (r_{i+n} - r_i)}{8LD} \quad (4)$$

则

$$E = \frac{8(F_{i+n} - F_i)LR}{\pi d^2 D (r_{i+n} - r_i)} \quad (5)$$

这就是实际测量杨氏模量时的计算公式。必须指出,如果用作图法求杨氏模量,由于只需作出 F_i 与 r_i 的变化曲线,这时可直接根据(1)式求解即可,而不能根据(6)式求解。

2.1 对计算间接测量值误差的讨论

在杨氏模量实验中,若计算间接测量值误差时,简单地利用多次测量值与平均值计算误差,很容易得出错误结果。例如,实验中,测得 $d \pm \Delta d = (4.905 \pm 0.014) \times 10^{-4} \text{m}$; $R \pm \Delta R = 1.182 \pm 0.002 \text{m}$; $L \pm \Delta L = 0.815 \pm 0.002 \text{m}$; $D \pm \Delta D = 0.0721 \pm 0.0005 \text{m}$ 。钢丝伸长时各有关量的测定值见表1。

表 1

i	$F_i(\times 9.78\text{N})$	$r_i = (r_i + r'_i)/2(\times 10^{-2}\text{m})$	$\Delta r_i = r_{i+4} - r_i(\times 10^{-2}\text{m})$
0	2	0.58	5.50
1	4	1.95	5.53
2	6	3.35	5.50
3	8	4.73	5.52
4	10	6.08	
5	12	7.48	
6	14	8.85	
7	16	10.25	

不少学生在处理数据时,先用四组 Δr_i 值分别代入(1)式,求得 E 分别为 $2.013 \times 10^{11} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ 、 $2.002 \times 10^{11} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ 、 $2.013 \times 10^{11} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ 、 $2.005 \times 10^{11} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$, $E = 2.008 \times 10^{11} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ 。

然后根据各次测量值和平均值求得

$$E \pm \Delta E = (2.008 \pm 0.005) \times 10^{11} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$$

上述计算方法实际上只考虑了 Δr_i 的测量误差,而忽略了其它物理量的误差,如 Δd 、 ΔL 、 ΔD 等,实际上它们的误差对 E 的测量误差 ΔE 的影响不能忽略,故必须用误差传递公式求 ΔE 才能得出准确结果。

2. 非等精度测量中容易忽视的错误

在处理非等精度测量时,不少学生或个别教材常将多次非等精度测量当作多次等精度测量来处理,并用算术平均值来表示测量结果,这是数据处理中常见的一种错误,必须加以重视。下面以平行光管测透镜焦距为例来说明,一般普物实验教材要求先用测微目镜沿一个方向测出波罗板上各线对的像的间距 $y'_i (i = 1, 2, \dots, 5)$, 重复测量三次,求出平均值 y_i , 再以测出的 5 对线条的间距 y'_i 的平均值 y_i 和对应波罗板上相应线对的实测值 y 及平行光管物镜焦距 f_0 , 分别代入公式

$$f'_i = f_0 \frac{y'_i}{y} \tag{6}$$

计算待测透镜的焦距 $f'_i (i = 1, 2, \dots)$, 最后用求算术平均值公式

$$f' = \frac{\sum_{i=1}^n f'_i}{n} \tag{7}$$

和平均值的偏差公式

$$\Delta f'_i = \frac{\sum_{i=1}^n |f'_i - \bar{f}'|}{n \sqrt{n-1}} \tag{8}$$

分别求出透镜焦距的平均值及平均绝对偏差。笔者认为用上述方法求透镜焦距的平均值及平均绝对偏差是不恰当的。根据误差理论,只有对同一个物理量作多次等精度测量结果的算术平均值,才可以作为待测量的最佳估计值,(7)、(8)两式才成立。而在上述测量中 f'_i 是通过直接测量 y'_i 而得到的间接测量量,对于测量 y'_i ,由于使用同一仪器(测微目镜)来测量,其绝对误差基本相同,故可近似认为是等精度测量,但对 f'_i 而言,由于 $f'_i = \frac{f}{y}$

y'_i ,若假设 f_0, y 均为标准值,则 $\Delta f_i = \frac{f}{y} \Delta y_i$,即 $\Delta f'_i$ 除了与 $\Delta y'_i$ 有关外,还与 f/y 有关。在上述5对线条间距测量中,虽然 $\Delta y'_i$ 相同,但 y 的名义值不同,分别为1.000mm、2.000mm、4.000mm、10.000mm和20.000mm,可见对 f_i 的测量不能看作等精度测量,故不宜用上述简单方法求平均值和平均绝对偏差来表示测量结果,应用加权平均值和标准偏差来描述测量结果。实验数据处理方法为:分别求出玻罗板上各线对像的间距,共测5次,求出各线对间距的平均值 $y'_i (i=1,2,\dots,5)$,及标准误差,分别代入(6)式及

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f'_i - \bar{f}')^2}{n(n-1)}} \tag{9}$$

求出各组测量值的焦距 f_i 和标准误差 σ_i ,列表如表2:

表 2

线对间距	1mm	2mm	4mm	10mm	20mm
$f'_i(\text{mm})$	f'_1	f'_2	f'_3	f'_4	f'_5
$\sigma_i(\text{mm})$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5

则加权算术平均值及其标准偏差为

$$\bar{f}' = \frac{\sum P_i f_i}{\sum P_i} \tag{10}$$

$$\sigma_{f'} = \sqrt{\frac{\sum P_i (f'_i - \bar{f}')^2}{(n-1) \sum P_i}} \tag{11}$$

其中 $P_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$

3. 实验中的有效数字

实验中有效数字取几位,这是实验数据处理中的重要问题,必须有一个明确的认识。有些学生在测量时总认为仪器上的刻度值一定代表准确值,因此读该数时往往在读完该刻度值的数值后再加上一位估计位,这种读数方法有时会引起读数错误,尤其是对于电阻箱或电表等一类仪器的读数,下面分别作简单讨论。

3.1 电阻箱电阻值的有效数字。有些教材常取电阻箱上所标的电阻值作为测量中的有效数字,忽视了电阻箱标示的电阻值存在着一定的误差。以实验室用的ZX21型电阻箱为例,对于ZX21型电阻箱,在额定电流范围内,误差 Δ 为

$$\Delta = \pm(a\%R + b) + Nr_0 \tag{12}$$

式中第一项为电阻箱的基本误差值(Ω), a 为准确度等级, 表示电阻箱电阻值相对误差的百分数, R 为电阻箱接入电阻值, b 为常数, 当 a ≤0.05 级时, b= 0.002Ω; 当 a ≥0.1 级时, b= 0.005Ω; 第二项为零电阻, N 为电阻箱上的旋钮数, r₀ 为每一旋钮允许的平均零电阻, 当 a ≤0.05 级时, r₀= 0.002Ω, 当 a= 0.1 或 0.2 级时, r₀= 0.005Ω。

例如, 总电阻为 99999.9Ω, 0.1 级的六旋钮电阻箱, 当示值分别为 0.2、2.0、20.0、200.0、2000.0、20000.0 时, 其基本误差、零电阻和电阻的有效数字如表 3。

表 3

电 阻	±(a% R+ b) (Ω)	Nr ₀ (Ω)	电阻值有效数字(Ω)	常见错误读数
0.2	0.0052	0.03	0.20	0.2
2	0.007	0.03	2.00	2.0
20	0.025	0.03	20.00	20.0
200	0.2	0.03	200.0	200.0
2000	2	0.03	2000	2000.0
20000	20	0.03	2.000×10 ⁴	20000.0

从上可见, 当电阻值高时, 电阻的误差来源于基本误差, 零电阻可以忽略; 当电阻值较小时, 零电阻占主要, 故此接线时应用低电阻接线柱, 以减小零电阻引起的误差; 电阻箱的电阻值的有效数字由准确度等级及零电阻决定。在 20Ω、2Ω 和 0.2Ω 时, 读数时可以在最小的标示电阻值上估读一位。而在 2000Ω 和 20000Ω 时, 估读位分别在 ×1 和 ×10 位上。

3.2 电表的有效数字。有些测量者在读取电表的数字时, 常在准确的刻度线上再加上一位估计数字。例如, 一个 0 ~ 1A, 等分 25 格的交流电流表, 分度值为 0.04A, 精度为 5 级。如图 1 所示, 当指针在 ①、④和 ⑦处时, 有的人分别读为 0.51、0.640 和 0.80, 这样, 同一电表有的读数有 3 位有效数字, 而有的读数只有 2 位有效数字。那么, 哪种情况该估读, 哪种情况不需估读呢? 根据误差理论, 测量的有效数字应取决于仪表的精度级别。在上例中, 电流表精度为 5 级, 电流表最大绝对误差 ΔX_m= ±a%·X_m= 0.05A, 亦即误差位落在百分之一位上, 故测量值的估读位也应在百分之一位上。因此, 指针在 ④处不需加估数“0”, 在 ⑦处则应加估读数“0”, 以示十分之一的数是准确数字。

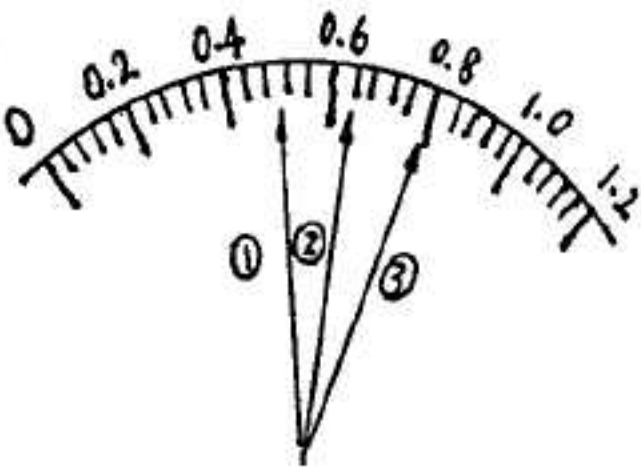


图 1

综上所述, 仪表或仪器的有效数字位数应由仪表或仪器的精度(或准确度)所决定, 不应在所有刻度值上加估读位, 也不宜千篇一律地估读到仪器最小刻度的十分之一或五分之一。一般地说, 任何测量仪器和仪表, 其准确度或仪器误差与分度值对应, 二者保持同一数量级。分度值约为准确度的 2~ 0.2 倍左右, 对于精度较高的仪器, 如 0.5 级电表, 分度值约为准确度数值的 2 倍, 这时有效数字可估读到电表最小分度值的十分之一, 对于低精度仪器, 如水银温度计, 分度值只有准确度数值的 0.2 倍, 即分度值为 0.1℃, 但准确度为 ±0.5℃, 故此, 有效数字不需估读到分度值内。

4. 系统误差存在时测量结果的表述

在误差理论教学中, 为了方便讨论, 常将系统误差和偶然误差分开, 即讨论系统误差

时,认为偶然误差不存在,或讨论偶然误差时,假设系统误差已消除,而实际的情况更多的是误差中既有偶然误差,同时又有系统误差。在这种情况下,实验结果应如何表述呢?

设对某物理量进行几次等精度测量,测量值为 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 各测量值除了含有偶然误差外,还包含一符号确定的系统误差 $\Delta^* X$, 测量结果应表示为

$$X = (X - \Delta^* X) \pm \Delta X \quad (13)$$

式中表示真值处在 $(X - \Delta^* X) - \Delta X$ 至 $(X - \Delta^* X) + \Delta X$ 区间的概率为 68.3%。如果把 $\Delta^* X$ 求出,则应以 $(X - \Delta^* X)$ 代替算术平均值,代替后的值与真值之差才会有 68.3% 的可能性落在 ΔX 区间上。如果 $\Delta^* X$ 未消除,以 $X = X \pm \Delta X$ 作为测量的最后结果,当 $\Delta^* X$ 较大时,真值就会超出 $X \pm \Delta X$ 范围而导致错误的结果。故此,对于以系统误差为主的仪器,不宜再用标准误差来评价测量结果的可信度。但现行的部分教材中,似乎不注意区分仪器的误差是以偶然误差为主,还是以系统误差为主,如灵敏度误差、准确度级别较低的电表误差(均属以系统误差为主的误差),统统用标准误差来评价测量结果,即写成

$$X = X \pm \Delta X \quad (14)$$

这种表述很容易造成概念上的混乱和错误,因为(9)式的表述是有特定的意义,它表示真值落入 $X - \Delta X$ 至 $X + \Delta X$ 区间的概率为 68.3%。故此当仪器的误差是以系统误差为主时,测量结果虽表述为 $X = X \pm \Delta X$ 形式,但此时式子已无概率上的意义, ΔX 很容易与有统计意义的标准误差混淆。

因此在表述误差时应注意区分仪器误差是以偶然误差为主,还是以系统误差为主,然后根据不同性质的误差作出正确的表述。一般地说,精度级别高的仪表(如 0.2 级电表),系统误差可以忽略,其误差主要是偶然误差;而级别低的仪表(如实验演示用的电表),则主要是系统误差,实验室常用的仪表和仪器,既有系统误差,又有偶然误差。对于以系统误差 Δ 为主的仪表,若误差 Δ 的符号不能确定,测量结果最好以

$$X = X(1 \pm \Delta) \quad (15)$$

的形式表述,以区别标准误差的表述;有些情况下,为了方便讨论,将系统误差用(9)式表示,这时必须对系统误差进行估计,使其与标准差等价,即大约为概率 68% 的对应值。如量程为 0~1A 的 1.0 级电流计,其最大误差为 $1 \times 1\% = 10\text{mA}$, 当假设它是高斯分布时,则用此电流计的测量值的不确定度取为 $10/3\text{mA}$ (假设极限误差约为标准误差的 3 倍)。

一般地说,当实验结果既有偶然误差存在,又有系统误差存在时,最好区别表述,以便需要时采用,表述方法可借鉴一些精密实验结果报道中常见的形式,如 1980 年西德某大实验组在电磁相互作用的研究时,测得强相互作用中与精细结构常数 α 对应的一个常数 a_s 的值为 $a_s = 0.17 \pm 0.02 \pm 0.03$, 其中 0.02 表示标准误差,0.03 表示系统误差,这种表述已被许多科学论文采用并被固定下来。(下转第 17 页)

$$\Delta E_G = \frac{v_0 u_0}{\sqrt{v_1^2 - u_0^2}} \tag{46}$$

ΔE_G 与 θ 有关, 由于 A—B 效应, 使低位激发谱的能隙 ΔE_G 变大;

2) 由于 A—B 效应, 非线性 K—G 方程(32) 的相速度 $v_1(\theta)$ 变成与 θ 有关, 与无 A—B 效应比较, 相速度显然变大;

3) 另一方面, A—B 效应的存在, 使得非线性 K—G 方程相应的吸引作用势项 $v_1^2(\theta)$ 增大, 这有利于非线性孤立波的稳定性。

参 考 文 献

1. 陈浩、陈渊, 物理学报, 1996: 45, 1249
2. W. Heisenberg, Z. Phys. 1928: 49, 619
3. D. C. Mattis, The Theory of Magnetism, (⊕) (1986) Springer- Verlag, Berlin- heidelberg
4. T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev 1940: 58, 1098
5. Wu Hang- sheng and Wu Ming- wei, Zeit fur Physik, 1994: B93, 151
6. V. G. Makhankov et al, Phys, Report, 1984: 104, 1

(上接第 12 页)

参 考 文 献

1. 张世箕, 测量误差及数据处理, 科学出版社, 1979
2. 肖明耀, 实验误差估计与数据处理, 科学出版社, 1980
3. 贾玉润等, 大学物理实验, 复旦大学出版社, 1987
4. 李静等, 普通物理实验, 华南理工大学出版社, 1993
5. 杨述武, 普通物理实验, 高教出版社, 1992
6. ZX21 型电阻箱使用说明书